c) Dacă , atunci .

Din condiția a) și teorema 15.1 rezultă existența punctului și fiindcă , atunci , adică . Deoarece este mulțime deschisă, atunci există sfera deschisă . Din relația rezultă existența numărului

, încât . Atunci și de aceea din condiția c) rezultă incluziunea . Deci mulțimea este acoperită cu o mulțime. din , ceea ce contrazice condiției b). Teorema e demonstrată.

Din această teoremă în particular primim, că orice segment R este mulțime compactă.

Următoarea afirmație reprezintă criteriul ca mulțimea să fie compactă.

*Teorema 15.3* Mulțimea este compactă atunci și numai atunci, când ea este mărginită și închisă în .

*Demonstrare.* Fie o mulțime compactă din . Atunci din teorema 14.1 și 14.4 rezultă, că mulțimea este închisă și mărginită.

Invers, fie o mulțime mărginită și închisă în . Atunci din mărginirea mulțimii rezultă, că mulțimea aparține unui segment dimensional. Deoarece este o submulțime închisă al mulțimii compacte , atunci este mulțime compactă (teorema 14.2). Teorema e demonstrată.

*Notă.* În cazul, când E este un spațiu metric arbitrat din faptul, că mulțimea este și mărginită încă nu rezultă, că mulțimea este compactă. Aceasta se vede din următorul.

*Exemplu.* În spațiul precăutăm sfera închisă unitară (0 este elementul nul în) și în mulțimea de puncte Atunci și de aceea (vezi demonstrarea teoremei 14.4) mulțimea infinită nu are puncte limită în . Astfel , conform teoremei 14.3 sfera închisă și mărginită nu este compactă.

***16. Proprietățile fundamentale ale aplicațiilor definite pe mulțimi compacte.***

*Teorema 16.1* (Despre imaginea mulțimii compacte). Dacă este o aplicație continuă a spațiului metric compact în spațiul metric , atunci este mulțime compactă.

*Demonstrare.* Fie o acoperire deschisă arbitrară a mulțimii . Deoarece aplicația este continuă, iar mulțimile sînt deschise în , atunci mulțimile sînt deschise în și este acoperire deschisă a mulțimii E.

Deoarece mulțimea E este compactă, atunci există o acoperire finită a ei, adică există indicii încât

(4.I)

Însă pentru orice . Atunci din (4.1) obținem , adică mulțimea este compactă . Teorema e demonstrată.

*Teorema 16.2* (despre continuitatea aplicației inverse) fie o aplicație continuă și biunivocă a spațiului metric compact pe spațiul metric . Atunci aplicația inversă , definită pe spațiul prin egalitatea pentru orice , este aplicație continuă a spațiului pe

*Demonstrare*. După cum se știe aplicația este continuă pe mulțimea atunci și numai atunci, cînd proimaginea a oricărei mulțimi deschise din este mulțime deschisă în . Aplicând această afirmație la aplicația , observăm că este suficientă să demonstrăm, că imaginea a oricărei mulțimi deschise din este mulțime deschisă în . Fixăm o mulțime deschisă arbitrară din . Atunci complementara este închisă în E și fiindcă spațiul este compact, atunci, atunci de asemenea este mulțime compactă (teorema 14.2) și de aceea este mulțime compactă în (teorema 16.1). Deci, este mulțime închisă în (teorema 14.1). Deoarece aplicația este biunivocă, atunci . Însă este mulțime închisă în . Atunci complementara ei este mulțime deschisă în . Teorema e demonstrată.

În paragraful 10 a fost subliniat , că din continuitatea aplicației pe mulțime încă nu rezultă continuitatea uniformă a ei. Încă în cazul mulțimilor compacte aceste noțiuni sînt echivalente, ceea ce rezultă din

*Teorema 16.3* (despre continuitatea uniformă). Dacă aplicația este continuă pe spațiul metric compact , atunci ea este uniform continuă pe mulțimea .

*Demonstrație.* Fixăm numărul . Deoarece aplicația este continuă pe mulțimea , atunci ea este continuă în orice punct . Deci pentru numărul există numărul încât pentru orice are loc inegalitatea.

. (4.2)

Vom precăuta sferele deschise pentru orice . Atunci mulțimea este acoperire deschisă a mulțimii . Deoarece spațiul este compact, atunci există în un număr de puncte , încât . (4.3)

Notăm , atunci Fie acum și două puncte arbitrare din , pentru care . Deoarece , atunci din (4.3) rezultă, că aparține la careva mulțime De aici și .

Considerând inegalitatea (4.2), obținem

.

Astfel, pentru orice există numărul , încât din inegalitatea rezultă inegalitatea , adică aplicația este uniform continuă pe . Teorema e demonstrată.

Din teoremele 16.1 ,14.1 , 14.4 și 8.4 rezultă

*Teorema 16.4*  (teoremele I și II Vaierștras). Dacă funcția numerică este continuă pe mulțimea compactă , atunci:

1. Funcția este mărginită pe ;
2. Funcția atinge pe mulțimea valorile cea mai mică și cea mai mare, adică există punctele încât pentru orice .

*Exemple.*

1.Fie un punct al spațiului metric și . Distanța de la până la se numește numărul De demonstrat, că dacă este mulțime compactă, atunci există punctul , încât

2.Distanța dintre submulțime și ale spațiului metric se numește numărul De demonstrat, că dacă mulțimile și sînt

3.De găsit distanța dintre circumferințele și

4.Demonstrați, că distanța dintre hiperbola și axa este egală cu zero. Rezultă oare din aceasta , că hiperbola și axa se intersectează?

***17. Noțiune de spațiu metric complet. Spațiu Banah. Proprietățile spațiilor complete.***

În teoria șirurilor numerice a fost stabilit principiul de convergență al lui Cauchy, care se mai numește proprietatea completitudinii a mulțimii numerelor reale. Din teorema 9.4 rezultă, că acest principiu are loc și în spațiul euclidian . Însă în spațiul metric arbitrar principiul de convergență al lui Cauchy poate să nu aibă loc din punct de vedere al suficienței (vezi exemplul după teorema 17.1).

În acest paragraf vom separa clasa de spații metrice, în care principiul de convergență al lui Cauchy rămâne în vigoare.

*Definiția 17.1.* Șirul de puncte din spațiul metric se numește *convergent în sine* ori *fundamental* , dacă pentru orice număr există numărul , încât pentru are loc inegalitatea , adică , când . Este evident, că orice șir fundamental este mărginit , fiindcă toate elementele acestui șir, începând cu careva indice, se conțin într-o sferă de raza cu centrul în careva punct .

Definiția 17.1 poate fi formulat în mod echivalent:

*Definiția 17.2* Șirul de puncte din spațiul metric se numește *fundamental* , dacă pentru orice există , încât pentru și are loc inegalitatea .

*Teorema 17.1* Dacă șirul de puncte din spațiul metric este convergent, atunci el este fundamental.

*Demonstrare*. Fie . Atunci pentru orice există numărul , încât pentru au loc inegalitățile

Din aceaste inegalități pentru , obținem

, adică șirul este fundamental. Teorema e demonstrată.

Există spații metrice, în care teorema reciprocă teoremei 17.1 , în general, nu are loc. Ca să ne convingem în aceasta, precăutăm următorul

*Exemplu.* Fie mulțimea numerelor raționale cu metrica, definită prin formula Precăutăm în șirul cu termenul general .

Ne putem convinge cu ușurință, că acest șir este fundamental, însă nu este convergent în , fiindcă nu este număr rațional.

E natural să punem întrebarea: Ce proprietate trebuie să posede spațiul metric , pentru ca fiecare șir fundamental al său să fie convergent în ?

În legătură cu aceasta vom da

*Definiția 17.3* Spațiul metric se numește *complet* dacă orice șir fundamental al său este convergent în .

Din teorema 17.1 și definiția 17.1 rezultă

*Teorema 17.2* Pentru ca șirul de puncte din spațiul metric complet să fie convergent, este necesar și suficient, ca el să fie șir fundamental.

Teorema 17.2 arată, că în spațiul metric complet are loc principiul de convergență al lui Cauchy pentru șirul de puncte.

*Teorema 17.3* Pentru ca șirul fundamental de puncte din spațiul metric să fie convergent, este necesar și suficient, ca acest șir să conțină un subșir convergent.

*Demonstrare.* Necesitatea condiției teoremei rezultă din teorema 9.3.

Pentru demonstrarea suficienței presupunem, că șirul fundamental de puncte . conține un subșir convergent către punctul Atunci când .

De aici, . Teorema e demonstrată.

În teorema următoare se stabilește legătura dintre submulțimea închisă a spațiului metric și completitudinea acestei submulțimi.

*Teorema 17.4* Pentru ca submulțimea a spațiului complet să fie spațiu complet, e necesar și suficient, ca ea să fie închisă în .

*Demonstrare.* Vom demonstra necesitatea. Fie, că submulțimea a spațiului metric complet este subspațiu complet. Vom arăta, că este mulțime închisă în .

Presupunem, că submulțimea nu este închisă în . Atunci există șirul de puncte , convergent către punctul . De aici rezultă, că șirul de puncte este fundamental și fiindcă este subspațiul complet, atunci .

Contrazicerea primită arată, că mulțimea este închisă în .

Vom demonstra suficiența. Fie, că submulțimea a spațiului metric complet este închisă în și - un șir fundamental de puncte din . Deoarece este spațiul metric complet, atunci șirul de puncte este convergent, adică . Din faptul, că A este mulțime închisă rezultă: . Deci este subspațiu complet. Teorema e demonstrată.

După cum a fost stabilit în paragraful 2, spațiul vectorial normat devine spațiu metric, dacă metrica în acest spațiu se definește cu ajutorul formulei (4). Deoarece spațiile complete normate au fost în fond studiate în anii douăzeci ai secolului XX de către S.Banah, atunci aceste spații se numesc *spații Banah*, ori - spații întro formă mai generală. Pentru a formula teorema, vom introduce noțiunea de diametru mulțimii numit *diametru* mulțimii mărginite din spațiul metric numărul

*Teorema 17.5* În spațiul metric complet orice șir descrescător de mulțimi închise diametrele cărora tind la zero, are un singur punct comun tuturor mulțimilor

Teorema 17.5 caracterizează completitudinea spațiului metric așa, cum teorema lui Cantor despre segmente, ce se contractă, caracterizează proprietatea continuității mulțimii numerelor reale.

*Teorema 17.6* Dacă din spațiul metric , orice șir de sfere închise, ce se contractă, are un punct comun tuturor sferelor acestui șir, atunci spațiul E este complet.

*Demonstrare.* Considerăm șirul fundamental din spațiul metric și vom alege numărul așa, ca inegalitatea

să aibă loc pentru orice . Fie sfera închisă cu raza și centrul în punctul , atunci . Într-adevăr, dacă , atunci

, adică.

Deoarece razele sferelor tind la zero, atunci conform ipotezei rezultă existența punctului , comun tuturor sferelor . Din faptul, că rezultă că , când , adică subșirul În virtutea teoremei 17.3, de aici rezultă, că șirul de puncte este convergent. Teorema e demonstrată.

18. Completitudinea spațiilor și .

În acest paragraf vom demonstra, că spațiile și sânt complete.

Completitudinea spațiului rezultă din teorema 9.4.